MODÈLES RÉDUITS ARX ET PRODUIT DE CONVOLUTION EN THERMIQUE LINÉAIRE DES SYSTÈMES INVARIANTS

Denis Maillet(1*) & Célien Zacharie(2) & Benjamin Rémy(3)

Société Française de Thermique

PROBLÉMATIQUE

- **Modèles paramétriques** de structure **ARX** (AutoRégressif à entrée eXterne) commencent à être employés (identification/utilisation directe ou inverse) dans la **communauté thermicienne**
- Modèles **ARX** développés initialement par les **automaticiens** (L. Ljung) , avec **approche plutôt mathématique et statistique**, sans liens/hypothèses de nature vraiment physique
- **Objectifs de ce travail**: faire le lien entre ARX et **modèles convolutifs** basés sur l'équation de la chaleur avec **diffusion** et/ou **advection solide ou liquide** avec des **hypotheses explicites:**
  - équation de la chaleur et ses conditions aux limites **Linéaires à coefficients Invariants en Temps**,
  - **excitation** thermique (en puissance ou en temperature) unique **séparable** (temps/espace), de partie temporelle $u(t)$ qui devient non nulle à $t = 0$
  - champ de température initial $T(\boldsymbol{r}, t = 0)$ 3D **permanent non nécessairement uniforme**,
  - **réponse** en température $y(t) = T(\boldsymbol{r}_{resp}) - T(\boldsymbol{r}_{resp}, t = 0)$ observée **en un point r_{resp} du domaine**
- **Difficultés**: Ces modèles sont identifies numériquement ou expérimentalement et sont donc des **modèles discret**s: fonctions entrée/sortie échantillonnées

MODÈLES CONVOLUTIFS ET ARX

Modèle convolutif

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t')\, u(t - t')\, dt'$$

sortie = réponse   réponse impulsionnelle   entrée = source = excitation

Quadrature numérique → convolution sous forme discrète:

$$y_k = y(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \hat{h}_j\, \tilde{u}_{k-j+1} \quad \text{avec } \tilde{x}_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\, dt \;:\; \text{dose de } x, \text{ pour } x = h \text{ ou } u$$

$$\text{et } \bar{x}_j = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\, dt \approx \frac{1}{2}\left(x(t_{j-1}) + x(t_j)\right) : \text{ valeur moyenne de } x \text{ sur } \left]t_{j-1}, t_j\right]$$

Forme matricielle sur les k premiers des m instants considérés:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{N}(\hat{\boldsymbol{h}})\,\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{N}(\bar{\boldsymbol{u}})\,\hat{\boldsymbol{h}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\boldsymbol{u}} \equiv \Delta t\, \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{h}} \equiv \Delta t\, \tilde{\boldsymbol{h}}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{N}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & & & & \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & & 0 & \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{x}_k & \bar{x}_{k-1} & \bar{x}_{k-2} & \cdots & \bar{x}_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \bar{\boldsymbol{x}} \equiv \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{bmatrix} \quad \text{pour } x = h \text{ ou } u$$

valeurs instantannées de la sortie — matrice de Toeplitz triangulaire inférieure formée à partir du vecteur $\bar{\boldsymbol{x}}$ — moyennes par intervalle

Modèle ARX (n_a, n_b, n_k) à une seule entrée externe

(L. Ljung, 1999 - Matlab)

$$y_k = -\underbrace{\sum_{i=1}^{na} a_i\, y_{k-i}}_{\text{termes autorégressifs}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{nb} b_j\, u_{k-j-nk}}_{\text{termes de l'entrée externe}}$$

NB: – le terme b_0 est absent;
– $n_k\,\Delta t$ est un éventuel retard temporel supplémentaire sortie/entrée

- **Avantages des modèles ARX:**
  - la *calibration* d'un modèle ARX d'ordre (n_a, n_b, n_k) à partir des mesures simultanées (entrées et sorties) = estimation des $n_a + n_b$ paramètres → **problème linéaire d'estimation des paramètres** (identification par moindres carrés ordinaires)
  - **faibles ordres** pour n_a et n_b (inférieurs à dizaine pour chacun), pour $n_k = 0$ → **résidus très faibles**, même avec des signaux bruités.
  - **modèle robuste**: valeurs des coefficients a_i et b_j estimés (expérience de *calibration*) → **bonne prévision d**es sorties pour entrées différentes (*validation*)
- **Inconvénients des modèles ARX:**
  - **hypothèses de validité** de l'emploi d'un modèle ARX non données dans littérature
  - estimation démarre à l'instant $t_k = 0$, **quid des signaux antérieurs** y_{k-i} et u_{k-j-nk} nécessaires pour estimation des paramètres ?
  - Choix des ordres du modèle: pas de règle → balayage empirique dans 2 à 3 directions de (n_a, n_b, n_k) sans **minimum** toujours **unique**
  - **volatilité des paramètres** lorsque l'on change un de ces 3 nombres

RÉSULTATS DE LA COMPARAISON DES 2 STRUCTURES DE MODÈLES

Résultats obtenu en 4 étapes principales

1) Version **ARX matricielle,**

- avec un paramètre additionnel b_0
- et pour $n_a < m$, $n_b < m$ et $n_k = 0$
- matrices Toeplitz carrées et vecteurs de taille m (avec $a_i = 0$ si $i > n_a$ et $b_j = 0$ si $j > n_b$)

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{a}^{prior})\,\boldsymbol{y} = \mathbf{N}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{b}^{prior} \qquad (13c)$$

$$\text{où: } \boldsymbol{a}^{prior} \equiv \begin{bmatrix} a_0 = 1 & a_1 & \cdots & a_{na} & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{b}^{prior} \equiv \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{nb} & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T \text{ pour } x = y \text{ ou } u$$

2) Ecriture sortie **modèle convolutif scalaire** y_k avec **origine temporelle glissante** et **pondération** avec poids α_i (pour $i = 1$ à k), de somme = -1:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}^{prior})\,\boldsymbol{y} = -\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{N}^T(\hat{\boldsymbol{h}})\,\bar{\boldsymbol{u}}^{flip} \quad \text{où } \boldsymbol{x}^{flip} \equiv \begin{bmatrix} x_k & x_{k-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}^T \quad (18b)$$

3) Comparaison (13c) et (18b), en identifiant les α_i *aux* a_i :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{b}^{prior} = -\mathbf{N}(\boldsymbol{a})\,\mathbf{N}^T(\hat{\boldsymbol{h}})\,\bar{\boldsymbol{u}}^{flip} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

4) Ecriture de (19) dans le cas particulier où $u(t)$ est un créneau temporel de durée Δt et d'amplitude Q (unité physique dépendant des unités de u et de y):

$$\boldsymbol{b}^{prior} = -\mathbf{N}(\tilde{\boldsymbol{h}}^{flip})\,\boldsymbol{a} \qquad (21b)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{nb} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{h}_m & & & & & \\ \hat{h}_{m-1} & \hat{h}_m & & & 0 & \\ \vdots & \hat{h}_{m-1} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ \hat{h}_1 & \hat{h}_2 & \cdots & \cdots & \hat{h}_{m-1} & \hat{h}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{na} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- les $n_b + 1$ paramètres b_j dépendent des n_a paramètres a_i , au travers des doses de la réponse impulsionnelle $h(t)$, avec la contrainte : $\sum_{i=1}^{na} a_i = -1$
- si $h(t) = 0$ pour $t > t_{nh}$ avec $t_{nh} < t_m$ on a $\hat{h}_k = 0$ pour $k > nh$

→ nécessité de prendre un décalage $nk \neq 0$

CONCLUSIONS : Si les hypothèses justifiant l'utilisation d'un modèle convolutif sont remplies, dans une configuration expérimentale donnée, alors les coefficients du modèle ARX dépendent de la réponse impulsionnelle correspondante.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE · lemta · CNRS

(*) Auteur correspondant (denis.maillet@univ-lorraine.fr)
(1, 2, 3) LEMTA, Université de Lorraine & CNRS
2 avenue de la Forêt de Haye - BP 90161, 54505 Vandœuvre-lès-Nancy cedex

Congrès français de thermique
Thermique et Mix énergétique
Belfort 1er-3 juin 2021