Modèles réduits ARX et produit de convolution en thermique linéaire des systèmes invariants

Denis MAILLET[1], Célien ZACHARIE[1] Benjamin REMY[1]

[1]Laboratoire Énergies et Mécanique Théorique et Appliquée
Vandoeuvre-lès-Nancy

INTRODUCTION

- **Modèles paramétriques** de structure **ARX** (**A**uto**R**égressif à entrée e**X**terne) commencent à être employés (identification/utilisation directe ou inverse) dans la **communauté thermicienne**

- Origine modèles **ARX** : **automaticiens** (L. Ljung, version Matlab pour identification) **approche mathématique et statistique**, ~~liens/hypothèses de nature vraiment physique~~

- **Objectifs de ce travail**: ARX ⟺ Produits de convolution

  équation de la chaleur **3D transitoire diffusion** et/ou **advection solide ou liquide**

  & hypotheses (modèle convolutif à source unique):

  - équation de la chaleur et ses conditions aux limites **Linéaires à coefficients Invariants enTemps (LTI)**

  - **excitation** thermique (puissance ou en temperature) **séparable** (temps/espace) à partie temporelle $u\,(t)$ (intensité de la source) non nulle pour $t > 0$

  - $T\,(\boldsymbol{r},\, t = 0)$ 3D **permanent non nécessairement uniforme**

  - **réponse** $y\,(t) = T\,(\boldsymbol{r}_{resp}) - T\,(\boldsymbol{r}_{resp},\, t = 0)$ observée **en un point** $\boldsymbol{r}_{resp}$ **du domaine**

- **Difficultés**: Modèles, souvent identifiés expérimentalement ou numériquement (reduction de modèle) = **modèles discrets**: entrée/sortie échantillonnées

Modèle convolutif SISO = 1 entrée, 1 sortie

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t h(t')\, u(t - t')\, dt'$$

sortie = réponse   réponse impulsionnelle   entrée = source = excitation

Après transformation de Laplace

$$\bar{u}(p) \rightarrow \boxed{\bar{H}(p)} \rightarrow \bar{y}_{forced}(p)$$

Quadrature numérique sur grille de temps   forme discrète :

- sortie y (t) échantillonnée
- entrée u (t) et réponse impulsionnelle h (t) paramétrisées (base de fonctions constantes par morceaux)

$$y_k = y(t_k) = \sum_{j=1}^{k} \hat{h}_j \, \tilde{u}_{k-j+1} \quad \text{avec } \hat{x}_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\, dt \quad : \boxed{\text{dose}} \text{ de } x \text{, pour } x = h \text{ ou } u$$

$$\text{et } \tilde{x}_j = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(t)\, dt \approx \frac{1}{2}\left(x(t_{j-1}) + x(t_j)\right) : \boxed{\text{valeur moyenne}} \text{ de } x \text{ sur } \left]t_{j-1}, t_j\right]$$

Forme matricielle du modèle convolutif sur les *k* premiers des *m* instants considérés:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{N}(\tilde{\boldsymbol{h}})\,\hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{N}(\tilde{\boldsymbol{u}})\,\hat{\boldsymbol{h}} \quad \text{avec} \quad \hat{\boldsymbol{u}} \equiv \Delta t\,\tilde{\boldsymbol{u}} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{h}} \equiv \Delta t\,\tilde{\boldsymbol{h}}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{N}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & & & & \\ \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & & 0 & \\ \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{x}_k & \tilde{x}_{k-1} & \tilde{x}_{k-2} & \cdots & \tilde{x}_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{\boldsymbol{x}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix} \text{ pour } x = h \text{ ou } u$$

valeurs instantannées de la sortie

matrice de Toeplitz triangulaire inférieure formée à partir du vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}}$

moyennes par intervalle

**Modèle ARX (n_a , n_b , n_k)
à une seule entrée externe**

(L. Ljung, 1999 - Matlab)

$$y_k = -\underbrace{\sum_{i=1}^{na} a_i \, y_{k-i}}_{\text{termes autorégressifs}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{nb} b_j \, u_{k-j-nk}}_{\text{termes de l'entrée externe}}$$

NB: – le terme b_0 est absent;

– $n_k \, \Delta t$ est un éventuel retard temporel supplémentaire sortie/entrée

- **Avantages des modèles ARX:**

  - l*calibration* d'un modèle ARX d'ordre (n_a , n_b , n_k) à partir des mesures (entrées et sorties) = estimation des n_a + n_b paramètres → **problème linéaire d'estimation des paramètres** (identification par moindres carrés ordinaires)

  - **faibles ordres** pour n_a et n_b (inférieurs à dizaine pour chacun), pour $n_k = 0$ → **résidus très faibles**, même avec des signaux bruités.

  - **modèle robuste**: valeurs des coefficients a_i et b_j estimés (expérience de *calibration*) → **bonne prévision d**es sorties pour entrées différentes (*validation*)

➢ Inconvénients des modèles ARX:

- **hypothèses de validité** de l'emploi d'un modèle ARX non données dans littérature

- estimation démarre à l'instant $t_k = 0$, **quid des signaux antérieurs** $y_{k\text{-}i}$ et $u_{k\text{-}j\text{-}nk}$ nécessaires pour estimation des paramètres ?

- Choix des ordres du modèle: pas de règle → balayage empirique dans 2 à 3 directions de $(n_a\ ,\ n_b\ ,\ n_k)$ sans **minimum** nécessairement **unique**

- **volatilité des paramètres** lorsque l'on change un de ces 3 ordres

Résultats de la comparaison: 4 étapes principales

1) Version **ARX matricielle,**

- avec un paramètre additionnel b_0

- et pour $n_a < m\ ,\ \ n_b < m$ et $n_k = 0$

- matrices Toeplitz carrées et vecteurs de taille m
  (avec $a_i = 0$ si $i > n_a$ et $b_j = 0$ si $j > n_b$)

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{a}^{prior})\ \boldsymbol{y} = \mathbf{N}(\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{b}^{prior} \qquad (13c)$$

où:

$$\boldsymbol{a}^{prior} \equiv \begin{bmatrix} a_0 = 1 & a_1 & \cdots & a_{na} & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{b}^{prior} \equiv \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{nb} & 0 & \cdots 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T \quad \text{pour } x = y \ \text{ ou } \ u$$

$$\boxed{\mathbf{N}(\boldsymbol{a}^{prior})\,\boldsymbol{y} = \quad \mathbf{N}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{b}^{prior} \qquad (13c)}$$

2) Ecriture sortie **modèle convolutif scalaire** y_k avec **origine temporelle glissante** et **pondération** avec poids α_i (pour $i = 1$ à k), de somme = -1:

$$\boxed{\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}^{prior})\,\boldsymbol{y} = -\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{N}^T(\tilde{\boldsymbol{h}})\,\hat{\boldsymbol{u}}^{flip} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{x}^{flip} \equiv \begin{bmatrix} x_k & x_{k-1} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}^T \quad (18b)}$$

3) Comparaison de ARX (13c) et Convolutif (18b), en identifiant les α_i *aux* a_i :

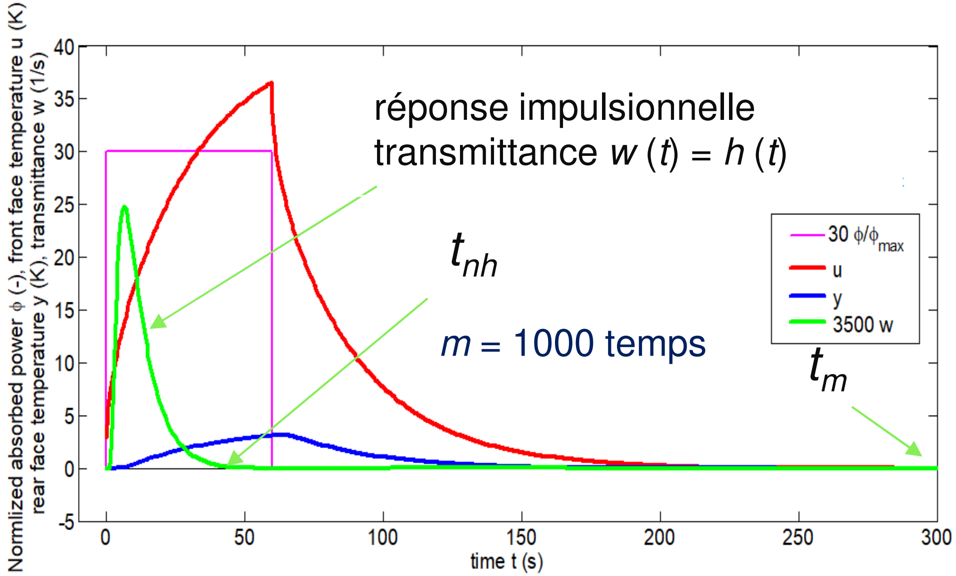
$$\boxed{\mathbf{N}(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{b}^{prior} = -\mathbf{N}(\boldsymbol{a})\,\mathbf{N}^T(\tilde{\boldsymbol{h}})\,\hat{\boldsymbol{u}}^{flip} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (19)}$$

4) Cas particulier où u (t) est un créneau temporel: durée Δt et amplitude Q
Equation (19) devient:

$$\boldsymbol{b}^{prior} = -\mathbf{N}(\tilde{\boldsymbol{h}}^{flip})\,\boldsymbol{a} \qquad (21b)$$

$$\mathbf{b}^{prior} = -\,\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{h}}^{flip})\;\mathbf{a} \qquad (21b)$$

$$\begin{bmatrix} b_0\\ b_1\\ \vdots\\ \vdots\\ b_{nb}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat h_m & & & & & \\ \hat h_{m-1} & \hat h_m & & 0 & & \\ \vdots & \hat h_{m-1} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\ \hat h_1 & \hat h_2 & \cdots & \cdots & \cdots\ \hat h_{m-1} & \hat h_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{na}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$



- les $n_b + 1$ paramètres b_j dépendent des n_a paramètres a_i au travers des doses de la réponse impulsionnelle $h\,(t)$, avec la contrainte : $\displaystyle\sum_{i=1}^{na} a_i = -1$
- si $h\,(t) = 0$ pour $t > t_{nh}$ avec $t_{nh} < t_m$ on a

→ nécessité de prendre un décalage $nk \neq$ ($\hat h_k = 0$ pour $k > nh$

CONCLUSIONS :

- Si les hypothèses d'utilisation d'un modèle convolutif remplies, pour configuration expérimentale donnée,

  ⇨ les coefficients du modèle ARX dépendent de la réponse impulsionnelle correspondante.

- $$y_k = -\sum_{i=1}^{na} a_i \, y_{k-i} + b_0 \, u_k + \sum_{j=1}^{nb} b_j \, u_{k-j} \quad (cas \; n_k = 0)$$

Emploi coefficient b_0 supplémentaire ⇨ intéressant :

y_k = valeur échantillonnée sortie $y\,(t)$ à t_k

u_k et h_k, ou $\tilde{u}_k$ *et* $\tilde{h}_k$ pour $k = i$ = valeurs moyennes de $u\,(t)$ et de $h\,(t)$ sur] t_{i-1}, t_i]:

L'introduction ce coefficient ne viole pas le principe de causalité

- Choix optimisé ordre (n_a , n_b , n_k) modèle ARX ⇨ problème ouvert

Merci pour votre attention !